MA1 – příklady k přednášce 2.12.2019

1. Ještě k minulé přednášce (užití 2 věty o substituci):

$$\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \equiv g^{-1}(x) \\ x=t^2 \; (\equiv g(t)) \\ x\in\langle 0,+\infty) \\ t\in\langle 0,+\infty) \\ g'(t)=2t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+2t+2}\,dt = \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt + (-2)\int \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt$$

$$= \ln(t^2+2t+2) - 2\,\mathrm{arctg}\,(t+1) + C = (t=\sqrt{x})$$

$$= \underline{\ln(x+2\sqrt{x}+2) - 2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}+1) + C}$$

2. Některé integrály lze „spočítat" užitím substituce i per partes
(příklady už v přednášce 25.11.)

a) $$\underline{\int \mathrm{arctg}\,x\,dx} \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{l} f'=1 \quad f=x \\ g=\mathrm{arctg}\,x,\; g'=\frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \underset{1VS}{=} \underline{x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\; x\in\mathbb{R}}$$

b) $\underline{\int\limits_{x\in(-1,1)} \arcsin x \, dx} \underset{2VS}{=} \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \ (\equiv g^{-1}(x)) \\ x = \sin t \ (\equiv g(t)) \\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ g'(t) = \cos t \end{array} \right| = \int t \cos t \, dt \underset{PP}{=}$

$= \left| \begin{array}{ll} f' = \cos t, & f = \sin t \\ g = t, & g' = 1 \end{array} \right| = t \sin t - \int \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + c$

$= x \arcsin x + \cos(\arcsin x) + c = \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c}$

(neboť pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t > 0$, tedy $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$
a pak $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$)

nebo také

$\underline{\int\limits_{x\in(-1,1)} \arcsin x \, dx} \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{l} f' = 1, \ f = x \\ g = \arcsin x, \ g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| =$

$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c},$

neboť: $-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \ (\equiv g(x)) \\ g'(x) = -2x \end{array} \right|$

$= \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c = \sqrt{1-x^2} + c.$

2. Integrace racionálních funkcí

Minulá přednáška „skončila" příkladem užití 2VS :

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \quad (\equiv g^{-1}(x)) \\ x = \operatorname{arctg} t \quad (\equiv g(t)) \\ t \in (-1,+\infty) \\ g'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

a řekli jsme si, že lze integrál, který jsme dostali „substitucí spočítat" tak, že lze provést „rozklad" součinu dvou zlomků „(tj. racionální funkci na součet dvou zlomků, které už „zvládneme" integrovat.

Jak ? Zkusme :
$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+t^2}\ , \ t \neq -1$$

tj.
$$1 = A(1+t^2) + B(1+t)$$
$$1 = At^2 + Bt + A + B \ , \ t \neq -1$$

Jak „určit" A, B ? – nahoře „dobrá" algebra :

Věta : Nechť $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ jsou polynomy, a nechť $p(x) = q(x)$ pro nekonečně mnoho $x \in R$, potom platí : 1) stupeň $p(x)$ = stupeň $q(x)$ $(=n)$

2) $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \dots n$.

(tedy polynomy $p(x)$ a $q(x)$ jsou „identické")

Tedy dostáváme (srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin) soustavu lineárních rovnic pro „neznámé" koeficienty:
(tzv. metoda neurčitých koeficientů)

$$\left.\begin{array}{lrl} u\ t^2: & A & = 0 \\ u\ t: & B & = 0 \\ u\ t^0: & A+B & = 1 \end{array}\right\} ?$$

tato soustava nemá řešení, tedy se nám rozklad nepovedl!

Jak lépe? Už bude „fungovat"

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2},$$ a hledáme A, B, C:

a srovnáním v rovnosti polynomů

$$1 = A(1+t^2) + (Bt+C)(1+t), \quad t \neq -1$$

$$1 = (A+B)t^2 + (B+C)t + A+C$$

dostaneme:

$$\begin{array}{lrl} u\ t^2: & A+B & = 0 \\ u\ t: & B+C & = 0 \\ u\ t^0: & A+C & = 1 \end{array}$$

Soustava má řešení $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2}$:

tedy: $$\int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} - \frac{1}{4}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$ a tedy

a tedy pak $$\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, či $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2}x + C, \ C \in \mathbb{R}$$

„obecný" návod pro integraci racionální funkce

(viz také „tahák" na „dálku")

Mějme racionální funkci $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x)$ – polynomy;

a) Je-li $\operatorname{st} p(x) < \operatorname{st} q(x)$ – $R(x)$ se nazývá ryze lomená racionální funkce
($\operatorname{st} p(x)$ = stupeň polynomu $p(x)$)
analogicky $\operatorname{st} q(x)$)

Pak platí (opět dokázáno v algebře):

Ryze lomenou racionální funkci lze právě jediným způsobem rozložit na součet konečně mnoha t. zv. jednoduchých (parciálních) zlomků, tj. zlomků

(i) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$, $\alpha\in R$, $n\in N$, (ii) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, $B, C\in R$, $n\in N$, $p^2-4q<0$.

Potom integrál z $R(x)$ je součtem integrálů

(i) $$\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} A\ln|x-\alpha| + c, & x\neq\alpha,\ n=1 \\ \dfrac{A}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}, & x\neq\alpha,\ n\neq 1,\ n\in N \end{cases}$$

(ii) pro $n=1$:

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(C-\frac{B}{2}p\right)\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{C-\frac{B}{2}p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c$$

Ale je asi jednodušší „pamatovat" si (a neučit se vzorce v předchozím návodu), že $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ lze vyjádřit pomocí součtu vhodných násobků (konstanty se snadno určí) integrálů $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q)$ a

$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$, který „doplněním" jmenovatele „na čtverec" spočítáme užitím $\int \frac{1}{1+t^2}dt$ $(= \operatorname{arctg} t)$.

<u>Pro $n \in N$, $n \geq 1$:</u>

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$.

Pak lze integrací per partes integrálu I_n získat rekurentní vzorec pro I_{n+1} (nezkoušší se „u nás"):

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n, \quad I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$(x \in R)$.

b) <u>pokud st $p(x) \geq$ st $q(x)$</u>, pak lze vyjádřit (vydělením)

$$R(x) = r(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)},$$

kde $r(x)$ je polynom (st $r(x)$ = st $p(x)$ − st $q(x)$) a st $\tilde{p}(x)$ < st q (a „jsme v a)")

Jak provedeme rozklad $R(x)$ na parciální (jednoduché) zlomky?

Je-li $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ryze lomená racionální funkce ($\mathrm{st}\, p < \mathrm{st}\, q$)

a jmenovatel $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$ rozložen na

$$q(x) = b_0 (x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{n_k} (x^2+p_1 x+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_\ell x+q_\ell)^{m_\ell},$$

kde $\alpha_1, \dots \alpha_k \in R$ jsou reálné kořeny polynomu $q(x)$, a dále činitelé $(x^2+p_j x+q_j)$ $(p_j^2 - 4q_j < 0)$ jsou součiny kořenových činitelů dvojic komplexně sdružených kořenů komplexních),

pak platí $n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_\ell = n$

a činiteli $(x-\alpha_i)^{n_i}$ odpovídá v rozkladu na jednoduché zlomky součet

$$\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{in_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}, \quad i = 1, 2, \dots k$$

a činiteli $(x^2+p_j x+q_j)^{m_j}$ odpovídá součet zlomků

$$\frac{B_{j1} x + C_{j1}}{x^2+p_j x+q_j} + \frac{B_{j2} x + C_{j2}}{(x^2+p_j x+q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jm_j} x + C_{jm_j}}{(x^2+p_j x+q_j)^{m_j}},$$

a příslušné integrály už „umíme" vyjádřit.

Zbývá nalezení koeficientů v rozkladu $R(x)$, – už bylo uvedeno v příkladu – užije se metoda „neurčitých" koeficientů (založená na větě o „rovnosti dvou polynomů").

Ukážeme na příkladech integrace racionálních funkcí

1. $$\int \frac{5x-1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}\right)dx$$

$x \neq \pm 1,\ x \neq 2$ $$= -2\ln|x-1| - \ln|x+1| + 3\ln|x-2| + K,\ K \in R$$

$$(\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,1),\ x \in (1,2),\ x \in (2,+\infty))$$

neboť funkce zadaná je ryze lomená a jmenovatel $(x^2-1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2)$; potom lze vyjádřit:

$$\frac{5x-1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}, \quad x \neq \pm 1, 2$$

a $$5x-1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x^2-1) \quad (*)$$

pak $$5x-1 = (A+B+C)x^2 + (-A-3B)x + (-2A+2B-C)$$

a dostaneme srovnáním koeficientů u „stejných" mocnin polynomů, které se rovnají pro $x \neq \pm 1, 2$ (ale „ze spojitosti" platí rovnost v R)

u t^2: $A + B + C = 0$

u t: $-A - 3B = 5$

u t^0: $-2A + 2B - C = -1$

tj. dostaneme soustavu rovnic pro hledané koeficienty A, B, C. Soustava má právě jedno řešení („musí" to tak „vyjít" – viz věta o rozkladu racionální funkce) – řešení je

$A = -2,\ B = -1,\ C = 3$

Poznámka: jsou-li kořeny jmenovatele reálné různé, pak lze získat „jednodušší" soustavu pro A, B, C dosazením kořenů do $(*)$:

$$(*) \qquad 5x-1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x^2-1)$$

pro $x=1$: $\quad 4 = -2A \Rightarrow A = -2$

$x=-1$: $\quad -6 = 6B \Rightarrow B = -1$

$x=2$ $\quad 9 = 3C \Rightarrow C = 3$

---

2. $$\int \frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx,$$

neboť: 1) $x^3-3x+2 = (x^3-1) - 3(x-1) = (x-1)(x^2+x+1-3) =$
$= (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)(x-1)(x+2)$,

tedy jmenovatel má dvojnásobný kořen $\alpha_1 = 1$, a $\alpha_2 = -2$.

potom (rozklad) 2) $$\frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

a $$5x^2-5x-3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

dosazením $x=1$: $\quad -3 = 3B \Rightarrow \underline{B=-1}$

$x=-2$: $\quad 27 = 9C \Rightarrow \underline{C=3}$

a třeba $x=0$: $\quad -3 = -2A + 2B + C$, tedy

$-3 = -2A - 2 + 3 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow \underline{A=2}$

Také lze řešit soustavu (získanou srovnáním koeficientů)

u t^2: $\quad A + C = 5$

u t: $\quad A + B - 2C = -5$

u t^0: $\quad -2A + 2B + C = -3$

---

tedy, $$\int \frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}\,dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + 3\ln|x+2| + K, \qquad x \neq 1,\ x \neq -2$$

3. $$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\,\mathrm{arctg}(x+1) + K,$$

$x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, +\infty)$

Výpočet koeficientů A, B, C v rozkladu:

$$5x^2+2x+3 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)$$

u x^2: $A + B = 5$

u x: $2A - B + C = 2$

u x^0: $2A - C = 3$

a odtud (sečtemе-li všechny tři rovnice): $5A = 10 \Rightarrow A = 2$,
a pak $B = 3$, $C = 1$.